平成15年度　卒業論文概要	
量子通信路容量の数値計算アルゴリズムを用いた Holevo 容量の超加法性の考察	内匠研究室　水野 達彦 学籍番号　No. 12117952

1　はじめに

符号化にエンタングルメントを許すことで，量子通信路容量が増大するか否かについて活発な議論がなされている．これまで，増大する結果は得られていなかったが，近年，記憶のある 2qubit のパウリ通信路において，Holevo 容量が増大する結果が解析的に示された．本研究ではこの結果を受け，光系を考えることで，Holevo 容量の増大と必要なエネルギーの関係を考察する．そのために，2 種類の量子通信路容量の数値計算アルゴリズムの特徴についても考察する．

2　量子通信路容量 (Holevo 容量)

与えられた量子通信路 $\mathcal{E}$ において，$\pi = (p_i; \hat{\rho}_i)$ (p_i:生起確率，$\hat{\rho}_i$:入力量子状態) で符号が構成されるとする．量子相互情報量は次式で定義される．

$$I(\pi) \equiv S\big(\mathcal{E}(\hat{\rho})\big) - \sum_i p_i S\big(\mathcal{E}(\hat{\rho}_i)\big) \tag{1}$$

但し，任意の $\hat{\omega}$ に対して $S(\hat{\omega}) = -\mathrm{Tr}[\hat{\omega}\log\hat{\omega}]$ であり，$\hat{\rho} = \sum_i p_i\hat{\rho}_i$ である．ここで，符号化にエンタングルメントを許可せず，任意の符号長に対し，量子一括測定を許可するとしたときの量子通信路容量を $C_{1,\infty}$ とする．これは，次式で定義される $\chi(\mathcal{E})$ と一致することが Holevo 等により示されている．

$$\chi(\mathcal{E}) \equiv \max_{\pi} I(\pi) \tag{2}$$

式 (2) は Holevo 容量と呼ばれる．ここで，入力量子状態 $\hat{\rho}_i$ を符号長 n の状態であるとする．そのとき，式 (2) は符号化に n-qubit のエンタングルメントを許可した場合の容量，$C_{n,\infty}$ を示す．$C_{n,\infty} > nC_{1,\infty}$ となるとき，これを Holevo 容量の超加法性という．

3　量子通信路容量の数値計算アルゴリズム

本研究では，Arimoto-Blahut アルゴリズムの量子版である Boundary アルゴリズムと，近年，Shor により提案されたアルゴリズムについて比較を行った．

3.1　Boundary アルゴリズム

量子相互情報量 $I(\pi)$ を 2 変数拡張し，それぞれの変数の相互最大化を行う．数値計算のみで処理できるが局所解に陥る可能性もある．制限を設けた通信路容量を計算する場合は探索等を用いる必要がある．

3.2　Shor アルゴリズム

入力量子状態 $\hat{\rho}_i$，生起確率 p_i，平均密度作用素 $\hat{\rho}$ の 3 変数を最適化するように問題を分割する．p_i に関しては線形計画問題となるが，その他は非線形最適化問題であり，探索法等を用いなければならない．

3.3　アルゴリズムの性能比較

これらを，記憶のある 2qubit のパウリ通信路に対して適用し，計算時間を比較した (表 1)．その結果，それぞれ得意とする問題が異なることが分かった．

表 1: 実装プログラムによる計算時間の比較

	1 更新の平均時間*		平均更新回数	
	$C_{2,\infty}$	$C_{1,\infty}$	$C_{2,\infty}$	$C_{1,\infty}$
Boundary	1	73.2	8.5	11.4
Shor	24.3	23.9	9.8	9.6

*$C_{2,\infty}$計算時の Boundary との比

4　記憶のある量子通信路での Holevo 容量の特性

メモリ因子 μ を導入した記憶のある 2qubit のパウリ通信路において，エンタングルメントを用いることで，Holevo 容量が増大する結果が得られた (表 2)．

表 2: 記憶のあるパウリ通信路の Holevo 容量

	$\mu \leq \mu_{\mathrm{t}}$	$\mu > \mu_{\mathrm{t}}$　*
Holevo 容量の関係	$C_{2,\infty} = 2C_{1,\infty}$	$C_{2,\infty} > 2C_{1,\infty}$
入力状態 ($C_{1,\infty}$)	積状態	積状態
入力状態 ($C_{2,\infty}$)	積状態	Bell 状態

*μ_{t}は通信路により定まる閾値

本研究では，この結果を光子数 0 と 1 で張られる光系 2 次元空間で考える．そして，入力の平均エネルギーとして，平均光子数を評価した．$\mu > \mu_{\mathrm{t}}$ のときの $C_{1,\infty}$，$C_{2,\infty}$ を達成する平均光子数は同値であり，エネルギーの増加無しに Holevo 容量が増加していることがわかった．また，$\mu_{\mathrm{t}} = 1/3$ となる通信路において，平均光子数に上限 N_{th} を与え，エネルギー拘束条件下での Holevo 容量の数値計算を行った (図 1)．

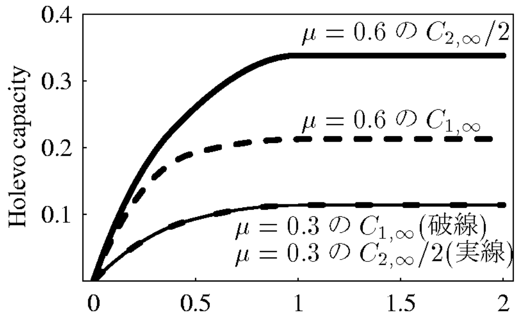

図 1: エネルギー拘束条件下での Holevo 容量

図 1 より，エンタングルメントによる Holevo 容量の増大はエネルギーの上限に依存しないことがわかる．

5　まとめ

本研究では，量子通信路容量の数値計算アルゴリズムがそれぞれ得意とする問題が異なる性質を示した．また，エンタングルメントを用いることによる Holevo 容量の増大は，必要なエネルギーに依存しない結果であることを示した．

参考文献

[1] 水野, 宇佐見, 臼田, 内匠, 平成 15 年度電気関係学会東海支部連合大会, 講演論文集, p.187, (2003).

[2] 水野, 宇佐見, 臼田, 内匠, 第 26 回情報理論とその応用シンポジウム (SITA2003), vol.2, pp.549-552, (2003).