

1 はじめに

平均誤り率を最小にする最適決定作用素を求める問題は、量子情報理論の分野における主要な問題のひとつである。しかし、具体的に解が得られているのは、いくつかの特定の信号に対してのみである [1]。これまでに得られている最適決定作用素のほとんどは、SRM と呼ばれる測定過程であり、特に信号が対称性を有するとき、その有効性が示されてきた。しかし、最近 Elder らにより、SRM と等価な測定である LSM (least-squares measurement) が定義され、LSM が CGU と呼ばれる部分対称信号について最適となる条件が示された [2]。本研究ではこれを元に、実際的な非対称信号に対する SRM の最適性と、その構造について考察する。

2 誤り率最小化問題

ここでは、古典情報を量子通信路によって伝送するモデルを扱う。{i|i = 0, 1, ..., M} を古典的情報源のアルファベットとし、その先験確率を {ξ_i} とする。古典入力情報 i には量子状態 (信号) ρ_i が 1 対 1 に対応し、これを量子測定 (決定作用素 {Π_j}) で記述される。これらを用いて、i を送信したときに j と決定される条件付確率 P(j|i) は

$$P(j|i) = \text{Tr} \rho_i \hat{\Pi}_j \quad (1)$$

となる。これによって従来の情報理論と同様に (平均) 誤り率が定義される：

$$P_e = \sum_{i=1}^M \sum_{j \neq i} \xi_i P(j|i) = 1 - \sum_{i=1}^M \xi_i P(i|i) \quad (2)$$

信号 {ρ_i} とその先験確率 {ξ_i} を固定し、式 (2) を最小化したものは、最小誤り率と呼ばれ、最小誤り率を与える最適決定作用素は次式のような量子ベイズ決定規範による必要十分条件を満たすことが知られている。

$$\hat{\Pi}_i (\xi_i \rho_i - \xi_j \rho_j) \hat{\Pi}_j = 0, \quad \forall i, j \quad (3)$$

$$\hat{\Gamma} - \xi_i \rho_i \geq 0, \quad \forall i \quad (4)$$

ただし、 $\hat{\Gamma} = \sum_{i=1}^M \xi_i \rho_i \hat{\Pi}_i$ である。

3 非対称信号に対する SRM の最適性

SRM は対称性をもつ多くの信号に対してその最適性が示されているが、非対称信号にも ASK や QAM のように重要な信号が存在する。そこで以下のような実際的な非対称信号に対する SRM の最適性と、信号の部分対称性について考察した。

3.1 BB84 プロトコルの 4 信号に対する SRM

量子暗号プロトコルの代表的なものである BB84 プロトコルで使用されている信号について考察した。これらの信号は、2 次元ヒルベルト空間で図 1 のように表される 4 つのベクトル |i> に対し次式のように表される量子状態信号 {ρ_i} である

$$|i\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\frac{(i-1)\pi}{4}) \\ \sin(\frac{(i-1)\pi}{4}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

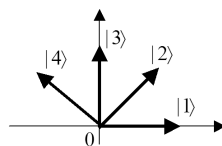


図 1: BB84

$$\rho_i = |i\rangle\langle i| \quad (6)$$

先験確率を {ξ_i = 1/4} と等しくしたとき、SRM は式 (3)(4) 共に満たし最適である。この信号は対称信号にも CGU にも属する。

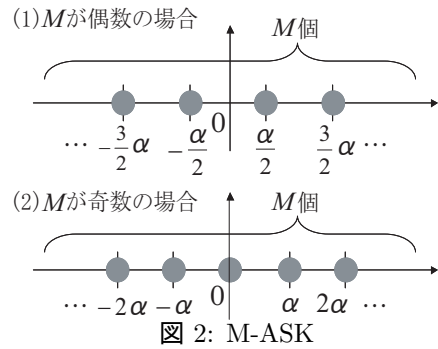


図 2: M-ASK

3.2 ASK 信号に対する SRM

位相平面で図 2 のように表される等間隔の M 元 ASK 信号について考察した。M=3,4 のとき、SRM は式 (4) は満たすが式 (3) を満たさず厳密には最適でない。しかし最適決定作用素との誤り率の差が微小であることから、SRM は準最適な振る舞いをしていることが分かった。そこで、M 元 ASK 信号について最適決定作用素との誤り率の差を

$$\Delta P_e = \frac{P_e^{(SRM)} - P_e^{(opt)}}{P_e^{(opt)}} * 100 \quad (7)$$

として比較した (図 3)。M ≤ 8 において ΔP_e は 4 元で最大値をとることから、元の数を増やしても SRM の準最適性は保たれる。M > 8 においては保証性はないが準最適性は保たれると考えられる。

また、M = 3 のときこの信号は対称信号・CGU のどちらのクラスにも属さず、M = 4 のとき CGU のクラスに属する。

ΔP_e (%)

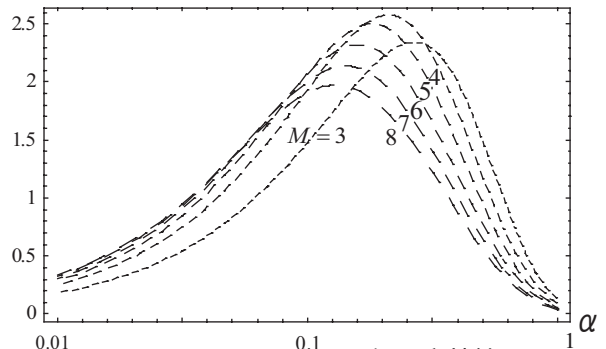


図 3: M-ASK における誤り率特性

4 まとめ

実際的な非対称信号に対する最適決定作用素の導出に向けて、SRM の最適性を示し、信号の属するクラスについて考察した。BB84 プロトコルに使用される信号に対して、SRM は最適となり、対称信号・CGU のどちらにも属する。等間隔の ASK 信号に対して、SRM は厳密には最適ではないが M ≤ 8 においては準最適な振る舞いをする。今後の課題として、4ASK 信号が CGU に属することを糸口として、この信号に対する最適決定作用素の構造分析などが挙げられる。

参考文献

- [1] 臼田, 藤原, 内匠, 畑, “量子情報理論における誤り率最小化問題”, SITA2002, pp.375-376, (2002).
- [2] Y.C.Elder, A.Megretski, and G.C.Verghese, LANL quant-ph/0211111, (2003).