平成 13 年度卒業研究		
入学年度　平成 10 年度	学籍番号　10117939	氏名　　高津直規
論文題目　コヒーレント状態による量子計算のための量子論理ゲートの考察		中野研究室

1　はじめに

将来の量子通信ネットワークに接続された量子コンピュータを実現するため，量子通信に利用される量子状態に対し有効な量子論理ゲートの実現が必要である．超長距離量子通信では，光のコヒーレント状態が用いられるが，コヒーレント状態による量子計算のための量子論理ゲートとして，Schrödinger cat 状態を基本量子 bit としたときの量子論理ゲートが，Milburn 達のグループによって考察されている．また，最近，コヒーレント状態を基本量子 bit としたときの量子論理ゲートが Milburn グループにより提案された．本研究では，Milburn グループが提案したゲートが有効に働く範囲について考察する．

2　Schrödinger cat 状態に対する論理ゲート

光の量子状態の代表的なものにコヒーレント状態があるが，直交しないため，これを基本として直交状態を形成できる式 (1) のような Schrödinger cat 状態を考える．

$$\begin{cases} |\Psi_{\mathrm{cat}+}\rangle = \frac{1}{N_+}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \Longrightarrow |0\rangle_{\mathrm{L}} \\ |\Psi_{\mathrm{cat}-}\rangle = \frac{1}{N_-}(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \Longrightarrow |1\rangle_{\mathrm{L}} \end{cases} \qquad (1)$$

ただし $|\alpha\rangle, |-\alpha\rangle$ はそれぞれ振幅 $\alpha, -\alpha$ のコヒーレント状態，$N_\pm = \sqrt{2(1 \pm \mathrm{e}^{-2|\alpha|^2})}$ である．

2.1　1-qubit ゲートの近似の評価

Milburn グループは，2-qubit ゲートの実現法と，1-qubit ゲートの近似的実現法を提案している．ここでは，この近似を Milburn グループと同じ評価法を用いて評価する．この近似を評価するため，実際の出力と近似的な出力との内積の絶対値の 2 乗 (fidelity) を計算する．fidelity の値が 1 に近いほど近似が妥当である．Milburn グループは，入力 qubit として $|0\rangle_{\mathrm{L}}$ と $|1\rangle_{\mathrm{L}}$ を入力した場合のみについて考察を行い，入力パワーが大きいとき，近似が妥当であると主張している．そこで，本研究では，$|0\rangle_{\mathrm{L}}$ と $|1\rangle_{\mathrm{L}}$ の重ね合わせとして定義される一般の qubit $|\psi\rangle$ に対し，実際の出力 $\hat{U}_{\mathrm{D}}(\gamma)|\psi\rangle$ と近似的な出力 $\hat{D}(\mathrm{i}\epsilon)|\psi\rangle$ との fidelity を厳密に計算した．

$$F = \left|\langle\psi|\hat{U}_{\mathrm{D}}^{\dagger}(\gamma)\hat{D}(\mathrm{i}\epsilon)|\psi\rangle\right|^2 \qquad (2)$$

2.2　1-qubit ゲートの近似の妥当性

式 (2) に基づき，数値特性を考察したところ，近似成立条件である信号パワーの大きいところでも，入力する qubit と回転角 γ によっては，全く近似が成立しない場合があることがわかった．また，数式を考察したところ，一般の qubit $|\psi\rangle$ に対する fidelity は，信号パワーが大きいとき，ほぼ $\cos^2\gamma$ となり，γ に対し振動するため，γ が 0 又は π 付近を除き，1 からかけはなれることがわかった．

3　コヒーレント状態に対する論理ゲート

最近，式 (3) のようなコヒーレント状態を基本量子 bit とした場合の量子論理ゲートが提案された．

$$\begin{cases} |0\rangle_{\mathrm{L}} = |0\rangle \\ |1\rangle_{\mathrm{L}} = |\alpha\rangle \end{cases} \qquad (3)$$

これらの qubit は，α が大きければ近似的に直交する．

3.1　BS ゲートの近似の評価

Milburn グループは，この qubit に対しても，2-qubit ゲートと 1-qubit ゲートの近似的実現法を示し，2-qubit ゲートのひとつである CNOT の fidelity に対する α の大きさについて評価している．そして，α が大きいときは近似は妥当であるとしている．これについて詳しく検証するため，CNOT の構成要素となっている BS ゲートの内積を計算した：

$$\begin{aligned} &{}_a\langle\gamma|_b\langle\beta|\exp[-2i\theta\gamma\beta]|\cos\theta\gamma + i\sin\theta\beta\rangle_a|\cos\theta\beta + i\sin\theta\gamma\rangle_b \\ &= \exp[-(\gamma^2+\beta^2)(1-\cos\theta) + 2i\sin\theta\gamma\beta]\exp[-2i\theta\gamma\beta] \quad (4) \end{aligned}$$

ただし，式 (4) で γ, β は 0 か α である．また，θ は BS の透過率に対応して，透過率は $\cos^2\theta$ である．

3.2　BS ゲートの近似の妥当性

BS ゲートの fidelity（式 (4) の絶対値の 2 乗）の特性を調べたところ，Milburn グループによる CNOT の評価と同様の傾向を示した．更に，fidelity で欠落している位相の影響について考察するため，内積の偏角を調べた．図 1 に，$\gamma = \beta = \alpha$ のときの振幅 α に対する内積の偏角の特性を示す．

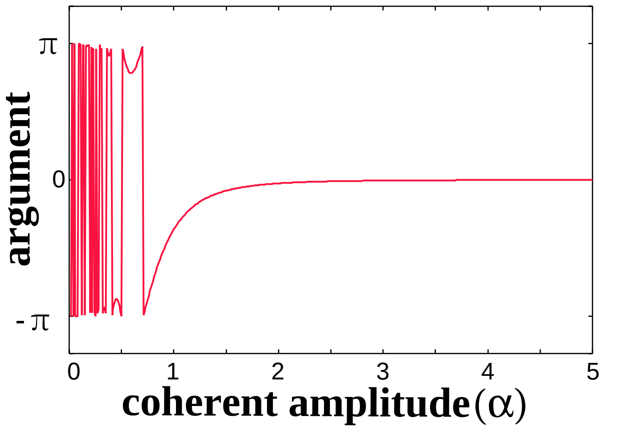

図 1: 小さい α に対する偏角

図 1 より，α が小さいところでは振動しており位相が不安定になるが，$\alpha > 5$ ではほぼ 0 に収束しているので，α が大きいところでは位相を考慮しても，なお近似は成立している．

4　まとめ

Schrödinger cat 状態に対する 1-qubit ゲートは，近似成立条件である α が大きいところでも，入力する qubit と回転角によっては，全く近似が成立しない場合があり，少なくとも機能を限定して利用する必要がある．

コヒーレント状態に対する量子論理ゲートは，基本量子 bit を入力した場合，α が大きいところでは近似が成立する．今後，一般の入力に対し，近似の評価をする必要がある．

参考文献

[1] 高津直規，臼田毅，内匠逸，第 24 回 情報理論とその応用シンポジウム (SITA2001) 講演論文集，vol. 2, pp.687-690, 2001.