

### 1 はじめに

1994 年の Shor の量子高速因数分解の発見以来、量子コンピュータの研究が盛んになってきている。そして、この量子コンピュータを実際に実現するために様々な量子状態を qubit として利用した量子論理ゲートの研究が行なわれている。しかし、量子コンピュータ以外の量子通信の分野からも量子論理ゲートを応用したいという要求があるにも関わらず、これらの量子論理ゲートの研究は量子コンピュータの実現のみに特化してしまっている。本研究では、量子通信で利用される量子状態を対象とした量子論理ゲート及び、量子コンピュータの実現を考察する。

### 2 量子コンピュータの基礎概念

現在のコンピュータが 0 と 1 の bit を基本として計算を実行するのに対して、量子コンピュータでは互いに直交する状態  $|0\rangle_L$  と  $|1\rangle_L$  だけでなく、それらの重ね合わせ状態を取ることができる quantum bit (qubit) を基本として計算を実行する。任意の qubit  $|\psi\rangle$  は、

$$|\psi\rangle = \cos\theta|0\rangle_L + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle_L \quad (1)$$

のように表すことができ  $|\psi\rangle$  を測定すると、 $\cos^2\theta$  の確率で  $|0\rangle_L$  が、 $\sin^2\theta$  の確率で  $|1\rangle_L$  が得られる。 $\phi$  は  $|0\rangle_L$  と  $|1\rangle_L$  の間の位相を表す。

また、現在のコンピュータが論理ゲートを基本素子とするデジタル回路で実現されているのと同様に、量子コンピュータも量子論理ゲートを基本素子とする量子回路で実現される。そして量子論理ゲートにおいて、式 (1) のような qubit に対し、従来の NAND ゲートのようなユニバーサルゲートに相当するものは、回転ゲートとコントロールドノットの組であることが Barenco 達によって明らかにされている。回転ゲートは式 (2)(3) のような行列で表される 1qubit の量子論理ゲートであり、1つの qubit の  $|0\rangle_L$  と  $|1\rangle_L$  の状態の比率および位相を任意に変化させることができる。

$$\hat{U}_{01}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\hat{U}_0(\phi_0) = \begin{pmatrix} e^{i\phi_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{U}_1(\phi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

そして、コントロールドノットは表 1 のように、control qubit  $|a\rangle$  が  $|1\rangle_L$  のときのみ、target qubit  $|b\rangle$  を反転させる 2qubit の量子論理ゲートである。

表 1: コントロールドノット

$ a\rangle$	$ b\rangle$	$ a'\rangle$	$ b'\rangle$
$ 0\rangle_L$	$ 0\rangle_L$	$ 0\rangle_L$	$ 0\rangle_L$
$ 0\rangle_L$	$ 1\rangle_L$	$ 0\rangle_L$	$ 1\rangle_L$
$ 1\rangle_L$	$ 0\rangle_L$	$ 1\rangle_L$	$ 1\rangle_L$
$ 1\rangle_L$	$ 1\rangle_L$	$ 1\rangle_L$	$ 0\rangle_L$

### 3 Qubit とその測定方法

量子通信で利用される量子状態の一つにコヒーレント状態があり、これはレーザー光などで近似的に実現することができるため重要である。しかしコ

ヒーレント状態は直交しないので、qubit としてはこのコヒーレント状態を基本として直交状態を形成できる式 (4) のような Schrödinger cat 状態

$$\begin{cases} |\Psi_{\text{cat}+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+e^{-2|\alpha|^2})}}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \equiv |0\rangle_L \\ |\Psi_{\text{cat}-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1-e^{-2|\alpha|^2})}}(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \equiv |1\rangle_L \end{cases} \quad (4)$$

を考える。ただし  $|\alpha\rangle, |-\alpha\rangle$  はそれぞれ振幅  $\alpha, -\alpha$  のコヒーレント状態である。

量子計算を実行した後の計算結果を読み出すためには、qubit の測定を行わなくてはならない。それゆえに計算結果の読み出し方法に相当する qubit の測定方法を示しておくことは重要である。これまでのほとんどの量子コンピュータの実現方法では量子計算後の計算結果を取り出すための測定方法は自明であり、取り立てて考える必要はなかった。しかし、このように定義された qubit に対する測定方法は自明ではないため、まず計算結果を取り出せるように qubit の測定方法を考えておかななくてはならない。これに関しては、プローブ系との相互作用によって相関を持たせたエンタングルド状態を生成し、プローブ系を測定することによって qubit を間接的に測定する方法を考察し、具体的に図 1 のように Ramsey System を用いて実現できることが分かった。

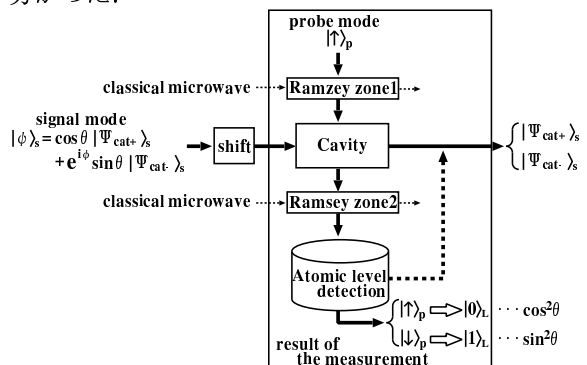


図 1: Ramsey system による qubit の測定

### 4 ユニバーサルゲートの実現

また、式 (2)(3) の回転ゲートとコントロールドノットは式 (1) のような論理的な qubit に対してどのようなユニタリ変換となればよいかを示しているに過ぎない。言い換えれば、実際に qubit を構成している Schrödinger cat 状態に対する量子論理ゲートの物理的対応すら明らかではなく、このままでは到底、実際にデバイスを構成することはできない。それゆえに、このように定義された qubit に対して量子論理ゲートを実現するには、これらの回転ゲートの物理過程を表すハミルトニアンを導出して物理的対応を明らかにしなくてはならない。これに関しては、Schrödinger cat 状態を qubit とした場合の量子誤り訂正符号の研究 [2] において、Milburn 達によって 1qubit ゲートと組み合わせることによって、コントロールドノットを構成することのできる 2qubit ゲートが示されている。したがって、式 (2)(3) の回転ゲートを実現すれば、ユ

ユニバーサルゲートを構成することが可能である。回転ゲートの実現についても、Milburn 達は量子光学の分野でポピュラーなシフト作用素を用いて、入力 qubit の信号パワーを大きく制限することによって、近似的に回転ゲートを実現するアプローチを示しているが、このゲートは実現性に優れた反面、ゲートの性能に問題があることがわかった。

そこで、本研究では Milburn 達のアプローチとは別に回転ゲートのハミルトニアンを導出し、回転ゲートそのものを実現することを考察した。なお、式 (2) の回転ゲートのハミルトニアンは

$$\hat{H}_{U_{01}(\gamma)} = i\hbar g \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{0,m}}{\sqrt{m!}} (\hat{a}^\dagger)^m \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\hat{a}^\dagger)^l \hat{a}^l}{l!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{1,n}^*}{\sqrt{n!}} \hat{a}^n \right\} + \text{h.c.} \quad (5)$$

のように導出することができる。そして、これから回転ゲートは 1 次から無限次の光の非線形相互作用に相当している。しかし、このままではこれらのハミルトニアンに対応するデバイスを実際に実現することは不可能である。なぜなら現在の技術では、非線形材料などを組み合わせたパッシブなデバイスで実現できる非線形性の大きさは 4 次程度が限界である。それゆえに、デバイスの実現性を考慮すると、ハミルトニアンは有限なものであることが望ましい。式 (5) のハミルトニアンが無級数となり、無限次の非線形性が必要となったのは、あらゆる信号パワーの入力 qubit に対して有効な回転ゲートを設計していたためである。そこで、本研究では回転ゲートに入力される qubit の信号パワーを小さく制限することによって、qubit を  $M$  個以下の光子しか含まない状態に近似し、 $M+1$  個以上の光子数状態に対する作用に対応していたハミルトニアンを省略することによって

$$\hat{H}_M = i\hbar g \left\{ \sum_{m=0}^M \frac{C'_{0,m}}{\sqrt{m!}} (\hat{a}^\dagger)^m \sum_{l=0}^M \frac{(-\hat{a}^\dagger)^l \hat{a}^l}{l!} \sum_{n=0}^M \frac{C'_{1,n}}{\sqrt{n!}} \hat{a}^n \right\} + \text{h.c.} \quad (6)$$

のようにハミルトニアンを単純化した。ここで、式 (6) のハミルトニアンは  $M = \infty$  とすると式 (5) のハミルトニアンになるので、入力 qubit の信号パワーに対して自由度を持つハミルトニアンであると考えることができる。

## 5 回転ゲートの性能

このように、入力 qubit の信号パワーを小さく制限することによって、qubit を  $M$  個以下の光子しか含まない状態に近似し、ハミルトニアンを有限なものに単純化することができたわけであるが、このハミルトニアンに対応する回転ゲートは近似的なものである。したがって、この近似ゲートの妥当性を検証しなくてはならない。これに関しては、式 (2) の回転ゲートの理想的な出力と近似ゲートの出力の内積の絶対値 overlap を計算して評価を行なう。overlap は 2 つの出力がどれくらい一致しているかを示すものであるため、overlap が 1 に近いほど近似は妥当であるということになる。逆に、overlap が 1 から遠いほど近似は妥当ではないということになる。図 2 と図 3 は、それぞれ Milburn 達のシ

フト作用素による回転ゲートと本研究の回転ゲートに  $|0\rangle_L$  か  $|1\rangle_L$  あるいは、 $|0\rangle_L$  か  $|1\rangle_L$  の重ね合わせ  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_L + |1\rangle_L)$  を入力した場合の回転角  $\gamma$  に対する性能である。また入力 qubit の信号パワーは、それぞれの近似の成立条件に設定した。すなわち、Milburn の回転ゲートへの入力 qubit 信号パワーは  $|\alpha|^2 = 100$  とし、本研究の回転ゲートへの入力 qubit 信号パワーは  $|\alpha|^2 = 1$  とした。さらに、本研究の回転ゲートのハミルトニアンとしては、式 (6) において  $M = 5$  のハミルトニアンを使用した。図 2 より、Milburn 達の回転ゲートは入力する qubit によっても、回転角  $\gamma$  によっても近似の精度が著しく変動している。特に、 $|0\rangle_L$  と  $|1\rangle_L$  を入力した場合、回転角  $\gamma$  が  $\frac{\pi}{2}$  と  $\frac{3\pi}{2}$  で overlap が 0 になるなど非常に不安定である。図 3 より、Milburn 達の回転ゲートは入力する qubit によっても、回転角  $\gamma$  によっても近似の精度は非常に高い水準で安定している。このように、本研究の回転ゲートは Milburn 達の回転ゲートに比べて実現性では劣るものの、性能では非常に優位であるといえる。

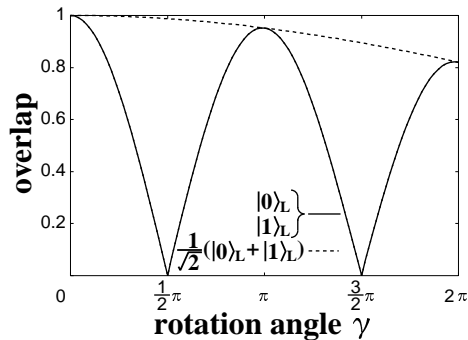


図 2: Milburn 達の回転ゲートの性能

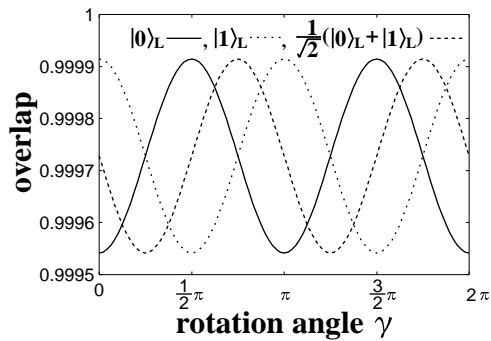


図 3: 本研究の回転ゲートの性能

## 6 まとめ

本研究では、Schrödinger cat 状態を qubit として定義し、量子通信において利用されるコヒーレント状態に対して有効な量子論理ゲート及び、量子コンピュータを考察した。

## 参考文献

- [1] S. Tatsuta, T. S. Usuda, I. Takumi, R. Nakano and M. Hata, "Quantum Measurement and Universal gates for Schrödinger cat states as Qubits," International Symposium on Information Theory and Its Applications, pp. 417-420, 2000.
- [2] P. T. Cochrane, G. J. Milburn, and W. J. Munro, "Macroscopically distinct quantum-superposition states as a bosonic code for amplitude damping," Phys. Rev. **A59**, pp. 2631-2634, 1999.