

1 はじめに

近年、量子力学の原理を融合した量子情報理論が注目されている。量子情報理論において、信号測定過程における誤り率を最小とする量子最適受信機の実現は大きな課題の一つである。量子最適受信機の実現のためには、その数学的な表現である最適決定作用素を導出し、さらに、実際のデバイスとの対応を明らかにしなければならない。これらの問題に対し、信号が古典雑音を含まない、いわゆる純粋状態である場合については、いくつかの具体的な信号系に対し解が求められている。一方、古典雑音を含む一般的な信号に対応する混合状態信号に対しては、ごく基本的な場合を除いてほとんど解が得られていないのが現状である。本論文では、純粋状態の最適決定作用素が混合状態に対しても最適となる場合があることを示し、その場合の誤り率特性や量子最適受信機の一実現法を示す。

2 誤り率最小化問題

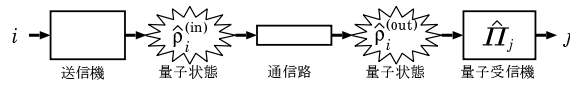


図 1: 量子通信システム

量子通信により古典情報 $\{i\}$ を伝送する場合、送信機は各情報に量子状態 $\{\rho_i\}$ を対応させ、伝送する。 ρ_i は以下を満たすエルミート作用素である。

$$\hat{\rho}_i \geq 0, \quad \text{Tr} \hat{\rho}_i = 1 \quad (1)$$

量子状態は量子受信機によって測定されるが、このとき、信号のもつ量子雑音が顕在化する。量子受信機は、次式のような単位分解を満たすヒルベルト空間上の非負エルミート作用素 $\{\hat{\Pi}_j\}$ で表される。

$$\hat{\Pi}_j \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{M-1} \hat{\Pi}_j = \hat{I} \quad (2)$$

ただし、 \hat{I} は恒等作用素である。この $\hat{\Pi}_j$ は決定作用素と呼ばれる。いま、信号 ρ_i が送信された時、受信側で $\hat{\rho}_j$ と決定される条件付き確率は $P(j|i) = \text{Tr} \hat{\rho}_i \hat{\Pi}_j$ と表される。以上より、量子情報理論における測定過程の誤り率は次式により表される。

$$P_e = 1 - \sum_{i=0}^{M-1} \xi_i \text{Tr} \hat{\rho}_i \hat{\Pi}_i \quad (3)$$

ここで、 ξ_i は各信号の先験確率である。上式を最小にする決定作用素を見出すことが量子情報理論における誤り率最小化問題であり、その解は最適決定作用素により与えられる。

3 純粋状態と混合状態のそれぞれの最適決定作用素の関係

3.1 最適決定作用素の関係 1

d 次元ヒルベルト空間における M 元混合状態信号 $\{\rho_i | i = 0, 1, \dots, M-1\}$ を以下のように定義する。

$$\hat{\rho}_i = \sum_{k=0}^{d-1} \hat{U}_i f_k |\lambda_k\rangle \langle \lambda_k| \hat{U}_i^\dagger \quad (4)$$

これに対し、純粋状態 $\{\rho_i^{(\text{pure})} | i = 0, 1, \dots, M-1\}$ を以下のように定義する。

$$\hat{\rho}_i^{(\text{pure})} = \hat{U}_i |\lambda_0\rangle \langle \lambda_0| \hat{U}_i^\dagger \quad (5)$$

これは式 (4) の信号に含まれる古典雑音を 0 にした極限であると考えることができる。

結果 1: 式 (4) の混合状態信号 $\{\rho_i\}$ の先験確率が等しく、信号のスペクトル分解における主要な項以外の係数が一様 ($f_1 = f_2 = \dots = f_{d-1}$) であれば、式 (5) の純粋状態信号 $\{\rho_i^{(\text{pure})}\}$ の最適決定作用素が $\{\rho_i\}$ に対しても最適となる。

3.2 最適決定作用素の関係 2

M 元純粋状態信号 $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, \dots, |\psi_{M-1}\rangle\}$ とどの信号でもない状態 $\{|\psi_M\rangle, |\psi_{M+1}\rangle, \dots, |\psi_{N-1}\rangle\}$ を考える。ただし、 $M \leq N$ である。この場合の純粋状態信号は

$$\rho_i^{(\text{pure})} = |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (6)$$

と表される。考えるべき混合状態信号は、信号以外の状態も含むこれらの量子状態の統計的重ね合わせであり

$$\hat{\rho}_i = \sum_{k=0}^{N-1} P_k^{(i)} |\psi_k\rangle \langle \psi_k|, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7)$$

となる。式 (7) は純粋状態 $|\psi_k\rangle$ が $P_k^{(i)}$ の確率で混合している状態を表している。これは、例えば送信機 (変調器) のエラーによって、一定の確率で他の量子状態が伝送されてしまう場合などに対応する。また、ここでも、各信号はユニタリ作用素で関連づけられており、混合度は等しいものと仮定する。

結果 2: 式 (7) の混合状態信号 $\{\rho_i\}$ の先験確率が等しく、群共変的で、かつ以下の条件が満たされるとき、式 (6) の純粋状態信号 $\{\rho_i^{(\text{pure})}\}$ の最適決定作用素が混合状態信号 $\{\rho_i\}$ に対しても最適となる。

$$P_k^{(0)} = P_{k'}^{(0)}, \quad k, k' = 1, 2, \dots, M-1 \quad (8)$$

$$P_k^{(i)} = 0 \text{ or } \hat{U}_i |\psi_k\rangle = |\psi_k\rangle, \quad k \geq M \quad (9)$$

以上の場合については、古典雑音の量変動しても同じ最適受信機を利用すればよいという意味で量子通信システムを安定的に運用してよいことがわかる。

4 誤り率特性

ここでは、純粋状態の量子最適受信機が混合状態に対しても最適となる場合の誤り率特性を、3 相 PSK コヒーレント状態信号を純粋状態信号とした場合を例にとって示す。3 相 PSK コヒーレント状態信号は、 $2\pi/3$ ずつ位相の異なる信号で、以下のように表される。

$$|\psi_0\rangle = |\alpha\rangle, |\psi_1\rangle = |\alpha e^{2\pi i/3}\rangle, |\psi_2\rangle = |\alpha e^{-2\pi i/3}\rangle \quad (10)$$

ここで、何らかの原因(送信機のエラーなど)により、一定の確率 p で他の信号量子状態が伝送されてしまう場合について考えると、信号は

$$\hat{\rho}_i = (1 - 2p)|\psi_i\rangle\langle\psi_i| + p \sum_{j \neq i} |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad i, j = 0, 1, 2 \quad (11)$$

と表される。ただし先験確率は等確率とする。これは 3.2 に示した条件を満たす。そこで、このような混合状態信号に対する誤り率特性を調べた(図 2)。

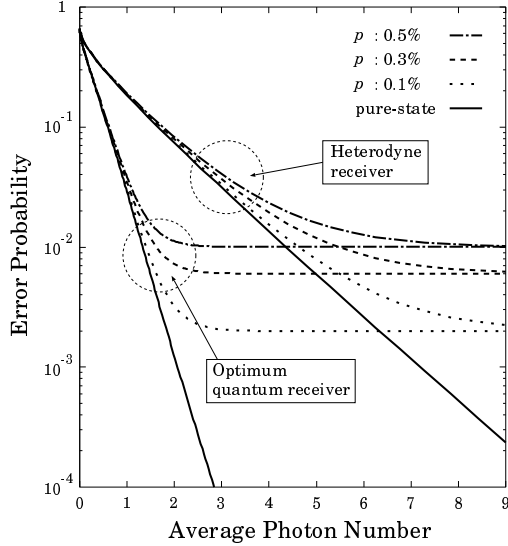


図 2: 3 相 PSK 信号の誤り率特性

5 量子最適受信機の実現化

最適決定作用素の物理的な対応は一般に明らかではないが、図 3 のように、信号に対するユニタリ変換と、よく知られた標準測定に対応する標準決定作用素とに分解できれば、量子最適受信機は原理的に実現可能といえる。このような受信機の構成法は受信量子状態制御方式と呼ばれる。

3 節に示したような場合には、実現化は純粋状態について考えれば十分である。本研究では、 M 元線形独立純粋状態信号に対する実現法を明らかにした。以下にそれを示す。

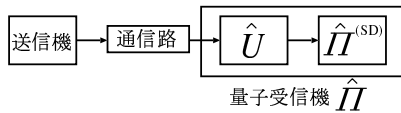


図 3: 受信量子状態制御システム

5.1 決定作用素の分解

各信号量子状態 $\{|\psi_i\rangle | i = 0, \dots, M-1\}$ に対して、標準決定作用素 $\hat{\Pi}_j^{(SD)}$ の和、すなわち量子系を表すヒルベルト空間上の恒等作用素を作用させると

$$|\psi_i\rangle = \sum_{j=0}^{M-1} \hat{\Pi}_j^{(SD)} |\psi_i\rangle = \sum_{j=0}^{M-1} \sqrt{\epsilon_{ij}} |A_{ij}\rangle \quad (12)$$

$$|A_{ij}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{ij}}} \hat{\Pi}_j^{(SD)} |\psi_i\rangle, \quad \epsilon_{ij} = \langle\psi_i | \hat{\Pi}_j^{(SD)} |\psi_i\rangle \quad (13)$$

となり、信号は M^2 個のベクトル $\{|A_{ij}\rangle\}$ からなる式に変形できる。次に、これらのベクトルに対し正規直交を行なう。その結果得られる $N(M \leq$

$N \leq M^2)$ 個の正規直交基底の張る N 次元空間において標準決定作用素と最適決定作用素は共に直交射影子である。あとは

$$\hat{\Pi}_j^{(opt)} = \hat{U}^\dagger \hat{\Pi}_j^{(SD)} \hat{U} \quad (14)$$

のように、最適決定作用素と標準決定作用素を対応づけるユニタリ作用素を導出すれば、そのユニタリ変換を実現する量子回路と標準測定により、量子最適受信機は原理的に実現可能である。

5.2 ユニタリ作用素の分解

量子最適受信機を構成するためには、最適決定作用素をユニタリ作用素 \hat{U} と標準決定作用素に分解するだけでなく、 \hat{U} のハミルトニアンを導出し、対応する量子回路の構成を明らかにする必要がある。

ストーンの定理より、 N 次元空間におけるユニタリ作用素 \hat{U} は以下のようにスペクトル分解できる。

$$\hat{U} = \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\theta_m} |x_m\rangle\langle x_m| \quad (15)$$

$e^{i\theta_m}$ と $|x_m\rangle$ はそれぞれ \hat{U} の固有値と固有ベクトルである。このとき、座標系 $\{|x_m\rangle\}$ において、 \hat{U} は

$$\hat{U} = \prod_{m=0}^{N-1} \hat{R}_m(\theta_m) \quad (16)$$

$$\hat{R}_m(\theta_m) = \exp[i\theta_m |x_m\rangle\langle x_m|] \quad (17)$$

となり、 N 個の 1 次元複素回転を表すユニタリ作用素に分解できる。これについては、対応する量子回路の構成が研究されており、それを適用すれば良い。よって、この回転に対応するハミルトニアンを導出することにより、量子回路の構成が可能となる。

6 まとめ

本研究では、純粋状態の最適決定作用素が混合状態に対しても最適となる場合が存在することを示し、その条件を明らかにした。また、そのような場合の誤り率特性を調べた。さらに、 M 元線形独立信号に対する量子最適受信機の一実現法を示した。本実現法は決定作用素が直交射影子測定で表される場合に適用可能である。

参考文献

- [1] 藤原, 白田, 内匠, 畑, “純粋状態信号に対する量子最適決定作用素の混合状態信号に対する適用可能性”, 信学論 (A), **J84-A**, no.1, pp.63-72, Jan. 2001.
- [2] Y. Fujihara, S. Tatsuta, T. S. Usuda, I. Takumi, and M. Hata, “Realization of quantum receiver for M -ary signals,” IEICE Trans. **E84-A**, no.4, 採録決定, April 2001.
- [3] Y. Fujihara, T. S. Usuda, I. Takumi, R. Nakano, and M. Hata, “Realization of optimum quantum receiver for M -ary signals,” Proc. ISITA2000, vol.1, pp.413-416, Nov. 2000.