

1 はじめに

量子情報理論において相互情報量最大化問題は重要な問題の一つである。最近, Shor は 3 元実対称信号に対し, 決定作用素数が信号数を上回る時, より大きな相互情報量が得られることを発見した。大崎はこの Shor の測定が 3 相 PSK 信号にも適用可能であると主張したが, その詳細について明らかにされていない。そこで, 本研究の目的は Shor の測定による 3 相 PSK 信号の情報量の特性を数値解析によって調査することとする。

2 量子通信と情報量

量子通信では先験確率 $\{\xi_i | \sum \xi_i = 1, \xi_i \geq 0, \forall i\}$ である古典送信信号 $\{x_i | i = 1, 2, \dots, M\}$ に量子信号 $\{|\psi_i\rangle | i = 1, 2, \dots, M\}$ を 1 対 1 に対応させる。さらに, 送られてきた量子信号に対し, 量子測定をすることにより受信信号 $\{y_j | j = 1, 2, \dots, N\}$ が決定され, 量子測定過程は決定作用素 $\{\hat{\Pi}_j | j = 1, 2, \dots, N\}$ で記述される。送信信号が x_i のとき受信信号が y_j と決定される条件付確率 $P(j|i)$ は

$$P(j|i) = \text{Tr}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\hat{\Pi}_j \quad (1)$$

となる。この条件付確率 $P(j|i)$ を用いることにより, 従来の情報理論と同様に相互情報量 $I(X; Y)$ は

$$I(X; Y) = \sum_i \xi_i \sum_j P(j|i) \log_2 \left[\frac{P(j|i)}{\sum_k \xi_k P(j|k)} \right] \quad (2)$$

で定義される。相互情報量最大化問題は先験確率 $\{\xi_i\}$ を等確率とし, 決定作用素 $\{\hat{\Pi}_j\}$ に関して最大値を求める問題である。このとき最大相互情報量 (accessible information) I_{ac} は次式のようになる。

$$I_{ac} = \max_{\{\hat{\Pi}_j\}} I(X; Y) \quad (3)$$

3 3 元量子信号の情報量

3.1 Shor の測定

3 元実対称信号は 3 次元ヒルベルト空間で次のように定義される信号である。

$$\begin{aligned} |f_1\rangle &= [\sqrt{1-\alpha}, 0, \sqrt{\alpha}]^T \\ |f_2\rangle &= \left[-\frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha}, \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\alpha}, \sqrt{\alpha}\right]^T \\ |f_3\rangle &= \left[-\frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\alpha}, \sqrt{\alpha}\right]^T \end{aligned} \quad (4)$$

ここで, T はベクトルの転置を表す。この信号の対称性を 3 重対称と呼ぶ。決定作用素は測定量子状態のダイアド積で表すことができる。測定量子状態を 3 重対称となるように次のように定義する。

$$|\mu_{j,k}\rangle = \sqrt{p_j} [\cos \phi_j \cos \theta_j^k, \cos \phi_j \sin \theta_j^k, \sin \phi_j]^T \quad (5)$$

ただし, $k = 1, 2, 3, \theta_j^2 = \theta_j^1 + 2\pi/3, \theta_j^3 = \theta_j^1 - 2\pi/3$ である。N 個の対称測定 (3N 個の決定作用素) によって I_{ac} が達成される。これらの測定量子状態が決定作用素となる条件は $t_j = \sin^2 \phi_j$ として次式で与えられる。

$$\sum_{j=1}^N p_j t_j = \frac{1}{3}, \quad \sum_{j=1}^N p_j = 1 \quad (6)$$

$|\mu_{j,k}\rangle$ と $|f_j\rangle$ から条件付確率を求め, 先験確率を $\xi_i = 1/3, \forall i$ とし, 相互情報量の式を展開すると, 相互情報量 $I(X; Y)$ は次のように表記できる。

$$I(X; Y) = \sum_{j=1}^N p_j F(t_j, \theta_j) \quad (7)$$

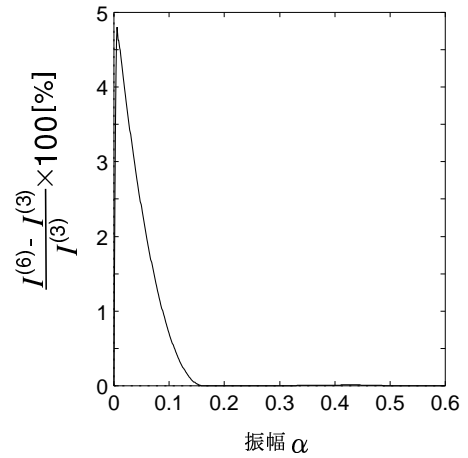


図 1: $0 \leq \alpha \leq 0.6$ における $I(3)$ に対する $I(6)$ の増加割合

$F(t_j, \theta_j)$ は j 番目の測定による相互情報量への寄与を表す。 θ_j は条件式 (6) に含まれていないため, 各 t_j について θ_j による $F(t_j, \theta_j)$ の最大化を行い, これを $F_{\max}(t_j)$ とする。関数 $F_{\max}(t_j)$ がどのような関数であるかによって I_{ac} を達成する決定作用素の数が増える。関数 $F_{\max}(t_j)$ が $t_j = 1/3$ において凹関数であれば,

$$I_{ac} = F_{\max}(1/3) \quad (8)$$

となり, 3 個の決定作用素によって I_{ac} が達成され, 凸関数であれば, $\sum_j p_j t_j = 1/3$ を満たす 2 点 $(t_1, F_{\max}(t_1)), (t_2, F_{\max}(t_2))$ の凸結合のうち最大である $I(X; Y)$ が I_{ac} となる。これを式で表すと

$$I_{ac} = p F_{\max}(t_1) + (1-p) F_{\max}(t_2) \quad (9)$$

となる。ただし, $0 < p < 1$ である。このとき, 6 個の決定作用素によって I_{ac} が達成されることになる。

3.2 3 相 PSK 信号の情報量の数値解析

3 相 PSK 信号の信号量子状態は次式で表される。

$$|f_1\rangle = |\alpha\rangle, \quad |f_2\rangle = |\alpha e^{2\pi i/3}\rangle, \quad |f_3\rangle = |\alpha e^{-2\pi i/3}\rangle \quad (10)$$

ここで, $|\alpha\rangle$ は振幅 α のコヒーレント状態である。測定量子状態を信号と同じ対称性を持つように定義し, 相互情報量の式を展開すると式 (7) と同様の表記を得る。ただし, 関数 F のパラメータ数は 4 個である (関数 F_{\max} のパラメータ数は 2 個となる)。数値的に相互情報量の最大化を行った。図 1 は α における従来の信号数と同じ数の決定作用素を用いた場合の相互情報量の最大値 $I(3)$ に対する Shor の測定を用いた場合の相互情報量の最大値 $I(6)$ の増加の割合を示している。 α が 0 に近いところで増加の割合が落ちているが, 数値解析の精度を上げると理論的には無限大に近付くと予想される。3 元実対称信号との比較では増加の割合が極めて大きく, 最大化の条件では似た特徴があった。 $I(6)$ が $I(3)$ を上回る領域は 2 つ存在した。

4 まとめ

3 相 PSK 信号に対して Shor の測定による情報量が従来の測定による情報量を上回ることを示した。また, その α の範囲や条件を明らかにした。

参考文献

- [1] 田川, 竜田, 白田, 内匠, “Shor の測定に基づく 3 元量子信号の情報量”, 平成 12 年度電気関係学会東海支部連合大会, 講演論文集, p.219, 2000.