

1 はじめに

量子通信システムの限界特性を知るため、また、それを実現化するため、特定の信号に対する最適決定作用素を解析的に導出することは重要である。しかし、混合状態信号に対しては、純粋状態信号に比べ、最適決定作用素が得られている信号が少なく、特に混合レター状態をもつ符号の最適復号は、明らかにされていない。そこで本研究は、混合レター状態をもつ符号に対しての最適決定作用素の特性について調べることを目的としている。

2 誤り率最小化問題

量子通信路において、 M 元の信号は量子状態 $\{\hat{\rho}_i | i = 1, 2, \dots, M\}$ で表される。量子状態には純粋状態と混合状態があり、混合状態は古典雑音を含む、より一般的な信号に対応している。送信信号が $\hat{\rho}_i$ のとき、受信信号が $\hat{\rho}_j$ と決定される条件付確率は、決定作用素 $\hat{\Pi}_j$ を用いて $P(j|i) = \text{Tr}[\hat{\rho}_i \hat{\Pi}_j]$ と表されるので、量子測定通信路における誤り率は以下のように表される。

$$P_e = 1 - \sum_{i=1}^M \xi_i \text{Tr}[\hat{\rho}_i \hat{\Pi}_i] \quad (1)$$

ただし、 ξ_i は信号 $\hat{\rho}_i$ の先験確率である。上式を最小にする決定作用素を見出すことが量子情報理論における誤り率最小化問題であり、その解は最適決定作用素によって与えられる。

3 送信信号と最適決定作用素の導出

本論文では、混合度の等しい 2 次元系における 2 元混合状態信号を扱う。

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 1-f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho}_2 = \hat{U} \hat{\rho}_1 \hat{U}^\dagger \quad \hat{U} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

ただし、 \dagger はエルミート共役を表す。これらの信号をレター状態とする符号語は、

$$\hat{\rho}_{i_1 i_2 \dots i_n} = \hat{\rho}_{i_1} \otimes \hat{\rho}_{i_2} \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_{i_n} \quad (3)$$

で表される。各レター状態について量子決定を行なう個別測定に対し、符号語を 1 つの量子状態として扱い、量子決定を行なう測定過程を量子一括測定という。

2 元信号に対して、最適決定作用素 $\{\hat{\Pi}_j\}$ は以下のように与えられることが知られている。また、そのときの誤り率は式 (6) のような最小値をとる。

$$\hat{\Pi}_1 = \sum_{\omega_i < 0} |\omega_i\rangle \langle \omega_i| \quad \hat{\Pi}_2 = \sum_{\omega_i \geq 0} |\omega_i\rangle \langle \omega_i| \quad (4)$$

$$P_e = \xi_1 + \xi_2 \text{Tr}[(\hat{\rho}_2 - \lambda \hat{\rho}_1) \hat{\Pi}_1] \quad (\lambda = \xi_1 / \xi_2) \quad (5)$$

$$= \xi_1 + \xi_2 \omega_1 \quad (6)$$

ここで $\omega_i, |\omega_i\rangle$ はそれぞれ $\hat{\rho}_2 - \lambda \hat{\rho}_1$ の固有値、固有ベクトルである。

4 誤り率特性

ここでは、符号長 3 から得られる 8 つの符号語のうち、2 つを選抜した符号である $\{\hat{\rho}_{111}, \hat{\rho}_{222}\}$ に対する誤り率の特性を、最適決定作用素、代表的な量子一括測定である Square-root measurement (SRM)、純粋状態に対する SRM を用いて調べた。また、個別測定+古典的誤り訂正との比較も行なっている。

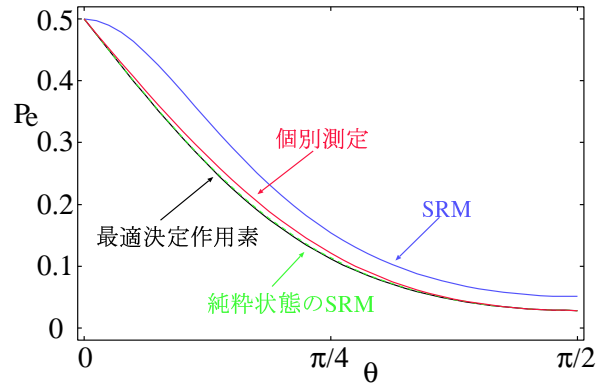


図 1: 3 次拡大信号の誤り率特性 ($f = 0.1$)

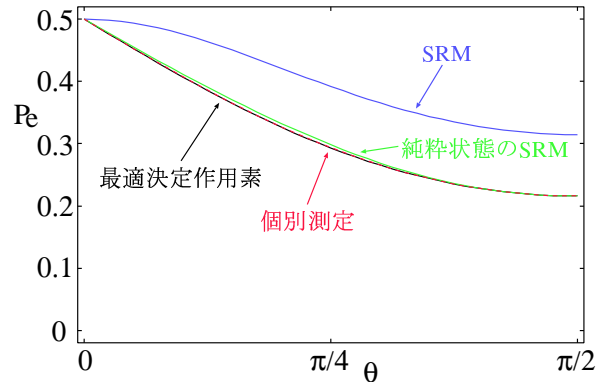


図 2: 3 次拡大信号の誤り率特性 ($f = 0.3$)

図より、古典雑音 f の値が大きくなるにつれ、SRM による誤り率は最適決定作用素による誤り率から離れていく。また、 f が小さいときは、純粋状態に対する SRM がほぼ最適となる。個別測定との比較の結果、 f が小さい時ほど、最適決定作用素による誤り率は小さくなっている。これより古典雑音が小さいときは、量子一括測定により、自動的に誤り訂正が行なわれているのみならず、更に誤り率が改善していることが分かる。

5 まとめ

2 次元系の 2 元混合状態をレター状態とする 2 元符号で、符号長 3 の場合の決定作用素の特性について示した。今後の課題として、2 次元系の混合レター状態をもつ符号に対する最適復号の解析解を導出することが挙げられる。

参考文献

- [1] 服部, 藤原, 白田, 内匠, “2 元混合状態信号の n 次拡大に対する量子最適検出の一考察”, 平成 12 年度電気関係学会東海支部連合大会, 2000.