平成 11 年度卒業研究		
入学年度　平成 8 年度	学籍番号　08117907	氏名　　伊藤健太郎
論文題目　2 元量子信号における通信路容量に関する研究		中野研究室

1　はじめに

量子情報理論において，古典情報理論 (従来の情報理論) には無い，相互情報量の「超加法性」の存在を明白に表す「符号長 2 の通信路容量 C_2」の解析解導出は未解決の問題の 1 つとなっている．本研究では，2 元純粋状態における C_2 を求めるための前段階として，限定された条件の下で符号長 2 の相互情報量の最大化を試み，その結果を考察する．

2　量子通信路容量とその超加法性

量子情報理論では，情報源の古典情報 $\{x_i\}$ を信号量子状態 $\{\hat{\rho}_i\}$ に変換し，量子伝送通信路を用いて伝送する．受信側では，送られてきた信号量子状態 $\{\hat{\rho}_i\}$ に対し量子測定通信路 (決定作用素 $\hat{\Pi}_j$) で決定を行い，再び古典情報 $\{y_j\}$ として出力する (図 1).

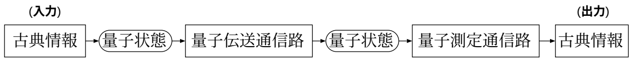

図 1: 量子情報理論における通信路モデル

信号量子状態と決定作用素によって，古典情報 x_i を送信して y_j が受信される条件付確率 $P(j|i)$ は,

$$P(j|i) = \mathrm{Tr}\hat{\rho}_i\hat{\Pi}_j \tag{1}$$

と表される．式 (1) の条件付確率より，量子通信路の相互情報量 $I_1(X;Y)$，及びその最大値である符号長 1 の通信路容量 C_1は ξ_i を x_i の先験確率として以下のように定義される．

$$I(X;Y) = \sum_i \xi_i \sum_j P(j|i)\log_2\left(\frac{P(j|i)}{\sum_k \xi_k P(j|k)}\right) \tag{2}$$

$$C_1 \equiv \max_{\{\xi_i\}}\max_{\{\hat{\Pi}_j\}} I(X;Y) \tag{3}$$

同様に情報源の n 次拡大に対して符号長 n の通信路容量 C_nが定義される．現在，2 元純粋状態の C_1 の解析解は得られているが，C_2 は得られていない．量子通信路においては，通信路容量の超加法性 $C_{m+n} \geq C_m + C_n$が存在する．符号長 2 の相互情報量 $I_2(X;Y)$ を計算し，これを符号長 2 で割ったものが C_1 を越えれば超加法性を示せる．ここではそれぞれを C_1 で割り，その値が 1 より大きいことで超加法性を示す．すなわち下式．

$$C_1 < \frac{I_2(X;Y)}{2} \leq \frac{C_2}{2} \iff 1 < \frac{I_2(X;Y)}{2C_1} \leq \frac{C_2}{2C_1} \tag{4}$$

3　数値解析による相互情報量の最大化

最大相互情報量を得るには，相互情報量を決定作用素と先験確率に関して最大化する必要がある．2 元純粋状態信号 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ を考え，信号間の内積を$\kappa = \langle 0|1\rangle$ とする. これを 2 次拡大した符号長 2 の信号 (符号語) を $|\psi_0\rangle = |0\rangle|0\rangle$，$|\psi_1\rangle = |0\rangle|1\rangle$，$|\psi_2\rangle = |1\rangle|0\rangle$，$|\psi_3\rangle = |1\rangle|1\rangle$ とする．4 つの信号量子状態を用いる場合，通信路容量は Davies の定理により 4 から 16 個の決定作用素で達成される. しかしここでは Fuchs らの数値解析に基づき決定作用素の数を 4 個と限定する．信号量子状態 (ベクトル) 数は 4 個なので信号空間は 4 次元となり，また決定作用素の数を 4 個と限定したので，決定作用素は直交射影子となる．4 次元空間の正規直交基底 $\{|\Phi_j\rangle\}$ より決定作用素 $\{\hat{\Pi}_j\}$ はベクトルの任意の回転を表すユニタリ作用素 $\hat{U}$ によって $\hat{\Pi}_j = \hat{U}|\Phi_j\rangle\langle\Phi_j|\hat{U}^\dagger$ と表すことができる．$|\psi_i\rangle$ を送信した場合に $|\Phi_j\rangle$ であると決定する条件付確率 $P(j|i)$ は,

$$P(j|i) = |\langle\psi_i|\hat{U}|\Phi_j\rangle|^2 \tag{5}$$

となる．先験確率については次の 2 パターンで最大化を行う．ただし各信号量子状態 $|\psi_i\rangle$ の先験確率を ξ_i とする ($\sum_i \xi_i = 1$).

1. 4 つの先験確率の内，1 つを 0，残り 3 つの内 2 つを等確率とする．これは，4 つの信号量子状態の内 3 つのみを用いることを意味する (図 2の実線)．またこれは，文献 [1](2 次拡大での超加法性の唯一の例) での先験確率の構成である．
2. 信号の対称性を考慮して，$\xi_0 = \xi_3$，$\xi_1 = \xi_2$ とする．信号量子状態 4 つ全てを用いることを意味する (図 2の点線).

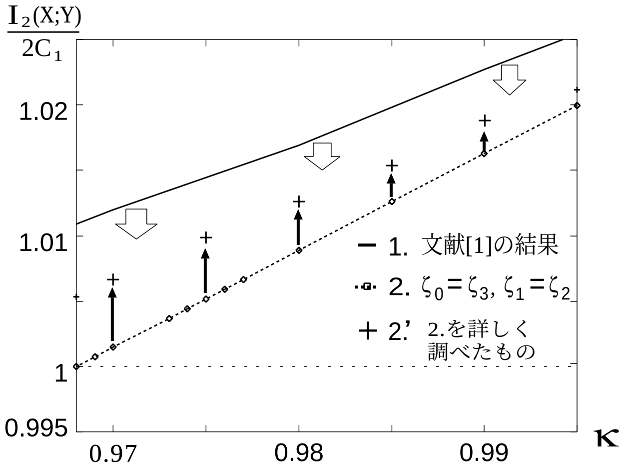

図 2: 符号長 2 の最大相互情報量の数値解析結果

これらをもとに符号長 2 の最大相互情報量 $I_2(X;Y)$ の数値解析を行った (図 2)．ただし図 2 の 2.′は上の 2. で得られた値の近傍をユニタリ作用素 $\hat{U}$ の回転角の精度を上げて細かく調べたものである．

図 2 よりユニタリ作用素の回転角の精度を上げると相互情報量の超加法性の達成の度合は上昇するが，1. を越えることはない，また 1. を微小変化させると超加法性の達成の度合が下がることより，文献 [1] の結果が符号長 2 の最大相互情報量 (通信路容量) を数値的に示している可能性が高いことが分かる．

4　まとめ

2 元純粋状態での符号長 2 の相互情報量について，決定作用素の数を 4 つと限定した条件の下，数値解析により最大化を行い，考察した．本研究の数値解析の結果を基にして，符号長 2 の通信路容量の解析解を導出することが今後の課題である．

参考文献

[1] J.R.Buck, et.al., LANL quant-ph/9903039.